



Obtention des équations dynamiques d'un système physique à partir de son modèle bond graph

Bénédicte Edibe

► To cite this version:

Bénédicte Edibe. Obtention des équations dynamiques d'un système physique à partir de son modèle bond graph. [Rapport de recherche] RR-1552, INRIA. 1991. inria-00075009

HAL Id: inria-00075009

<https://inria.hal.science/inria-00075009>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNITÉ DE RECHERCHE
INRIA-RENNES

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P.105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél.: (1) 39 63 55 11

Rapports de Recherche

N° 1552

Programme 4
Robotique, Image et Vision

OBTENTION DES EQUATIONS DYNAMIQUES D'UN SYSTEME PHYSIQUE A PARTIR DE SON MODELE BOND GRAPH

Bénédicte EDIBE

Novembre 1991



★ R R . 1 5 5 2 ★

OBTENTION DES EQUATIONS DYNAMIQUES D'UN SYSTEME PHYSIQUE A PARTIR DE SON MODELE BOND GRAPH

Publication Interne n° 605 - Septembre 1991 - 26 pages

Programme 4

Bénédicte EDIBE
IRISA¹ / INRIA²
Campus de beaulieu
35042 Rennes Cedex
France

Obtention des Equations Dynamiques d'un Système Physique à Partir de son Modèle Bond Graph

Résumé

L'objet de ce rapport est de présenter notre travail sur la simulation des systèmes physiques modélisés par bond graphs. L'intérêt fondamental de la modélisation bond graph réside dans l'homogénéité du langage de représentation, quel que soit le domaine physique d'application. Une introduction au formalisme bond graph est proposée en annexe. Le modèle mathématique associé à une représentation bond graph est constitué d'un ensemble de relations dont le paramétrage est surabondant. L'obtention des équations dynamiques du système physique implique la réduction de cet ensemble de relations élémentaires. Après un exposé des outils de simulation connus dans le domaine des bond graphs, nous décrivons la méthode de réduction que nous avons élaborée. Dans la continuité des travaux de l'équipe, cette méthode est fondée sur le calcul formel et produit un jeu d'équations symboliques directement utilisable par le module de résolution du système d'animation et simulation réalisé au sein de l'équipe SIAMES¹.

Derivation of the Dynamic Equations of a Physical System from its Bond Graph

Abstract

This report presents our work on simulation of physical systems in a context of bond graph modeling. Bond graph language is a powerful tool for systems modeling because it represents them in a unified way, whatever the physical domain concerned is. An introduction to bond graphs is to be found in appendix. The mathematical model bound to a bond graph model is a set of relations involving too many variables. This set of relations has to be reduced in order to obtain the dynamic equations of the system. In this report, we first present a survey of the bond graph simulation methods and then we describe our reduction method, which is based on symbolic calculus ; the set of symbolic equations obtained are directly solvable by the resolution program which is part of the animation and simulation system conceived by the SIAMES team.

¹Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires.

²Institut National de Recherche en Informatique et Automatique.

¹Synthèse d'Image, Animation, Modélisation et Simulation.

1 Introduction

Le langage bond graph est un langage de représentation graphique de systèmes physiques, fondé sur la modélisation des phénomènes énergétiques intervenant au sein de ces systèmes. Cette approche énergétique permet de souligner les analogies qui existent entre les différents domaines de la physique (mécanique, électricité, hydraulique, thermodynamique, acoustique, etc...) et de représenter sous une forme homogène les systèmes physiques pluri-disciplinaires.

Plus précisément, le modèle bond graph d'un système physique explicite les échanges de puissance (symbolisés par des liens) intervenant entre différents éléments (représentés par des nœuds) qui produisent, dissipent, stockent ou transmettent de l'énergie. A chaque nœud du bond graph sont associées une ou deux relations caractéristiques du phénomène physique symbolisé. On obtient donc directement un ensemble de relations entre les grandeurs effort et flux servant à paramétrer le système physique (le lecteur non initié au langage bond graph trouvera en annexe une présentation de ce formalisme).

De cette façon, la modélisation bond graph permet non seulement de décrire la structure topologique du système physique représenté mais aussi d'obtenir les équations dynamiques traduisant l'évolution de ce système. Un certain nombre des variables intervenant dans les relations élémentaires sont dépendantes entre elles, le paramétrage du système est donc surabondant ; l'obtention des équations dynamiques implique la réduction du système des relations élémentaires du bond graph.

La méthode proposée ici consiste à effectuer une série ordonnée de substitutions entre les variables du système. Nous préciserons plus loin les conditions (objectifs, moyens) qui nous ont incité à opter pour cette méthode que nous avons testée en réalisant un prototype avec le langage MAPLE. Avant d'exposer la démarche suivie et les résultats obtenus, nous rappelons les spécificités d'un certain nombre de programmes de simulation connus dans le domaine bond graph.

2 Simulation d'un modèle bond graph

La plupart des programmes de simulation bond graph ont, au départ, recours à un outil opératoire dénommé causalité, qui consiste à organiser sous forme entrée/sortie les relations élémentaires du bond graph et qui permet d'une part de valider le modèle bond graph entré et, d'autre part, de prévoir la forme générale des équations dynamiques du système physique [RK83] ; cette connaissance préalable de la forme des équations associées à une modélisation donnée est utile car certaines formes sont source de problèmes pour le programme en question et il convient alors d'essayer de contourner le problème, par exemple en modifiant la modélisation du système physique (nous verrons plus loin des exemples).

Les différentes formes de systèmes d'équations possibles sont présentées dans le paragraphe suivant ; il est préférable de bien préciser le sens de certains termes qui sont utilisés par la suite pour la définition du domaine d'application de tel ou tel programme de simulation bond graph.

2.1 Forme des équations dynamiques

La forme générale des équations dynamiques d'un système modélisé par bond graph [Gra84] est conditionnée par un certain nombre de phénomènes liés à la nature du système, sa configuration et sa complexité (couplages entre variables, non linéarité de certaines relations, etc...).

2.1.1 Variables d'état - variables de sortie

Les variables d'état sont les variables qui permettent de calculer l'état du système. Pour un certain nombre de systèmes, les équations d'état peuvent être formulées comme suit :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

Les x_i sont les variables d'état du système et les u_r sont les efforts ou les flux fournis par les éléments sources.

On peut écrire les équations (1) sous forme matricielle (1'), plus compacte :

$$\frac{dX}{dt} = F(X, U) \quad (1')$$

Le système d'équations (2) (ou (2') sous forme matricielle) donne les variables y_j dites variables de sortie du système. Ce ne sont pas des variables d'état, mais la connaissance de leur comportement peut s'avérer nécessaire.

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r) \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (2)$$

$$Y = G(X, U) \quad (2')$$

2.1.2 Linéarité des équations

On parle de système linéaire lorsque les fonctions f_i sont linéaires.

En général, les systèmes que nous voulons animer sont non linéaires. Les systèmes mécaniques présentent souvent des non linéarités d'origine géométrique exprimées à l'aide de transformateurs modulés. Par ailleurs, certains phénomènes physiques sont caractérisés par des relations non linéaires [Kar81], notamment les phénomènes présentant une saturation (diodes, frottements de Coulomb, etc...).

2.1.3 Couplages entre variables

Les équations (1) écrites plus haut sont des équations explicites.

Lorsqu'il y a des couplages dynamiques entre variables d'énergie (variables liées aux éléments de stockage), les équations d'état sont implicites :

$$F\left(\frac{dX}{dt}, X, U\right) = 0 \quad (3)$$

A titre d'exemple, une liaison rigide entre deux solides entraîne une interdépendance des mouvements des deux solides, autrement dit un couplage entre les vitesses des deux solides.

Un couplage entre éléments dissipatifs implique l'existence d'une boucle algébrique (4) ; on voit apparaître une équation algébrique implicite.

$$(4) \begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, Y, U) \\ G(X, Y, U) = 0 \end{cases}$$

La forme générale d'un système d'équations implicites où interviennent des boucles algébriques s'écrit (5) :

$$(5) \begin{cases} F\left(\frac{dX}{dt}, X, Y, U\right) = 0 \\ G(X, Y, U) = 0 \end{cases}$$

La majeure partie des systèmes mécaniques polyarticulés entraîne ce type de systèmes d'équations, appelés systèmes d'équations algèbro-différentiels, ou DAEs en anglais [Bos88].

2.2 Programmes de simulation bond graph existant

La structure générale d'un programme de simulation obéissant à la norme CSSL (Continuous System Simulation Language) est la suivante :

- lire la description du modèle présenté en entrée.
- construire les équations d'état et les équations de sortie du système physique.
- résoudre ces équations avec un programme d'intégration numérique.
- stocker et visualiser les résultats.

Parmi les programmes de simulation conçus pour traiter les modèles bond graph, on peut citer Enport, CAMP, TUTSIM et CAMAS. Ces outils d'aide à la modélisation bond graph permettent de valider le modèle entré graphiquement (ou sous un format spécifique) et d'étudier les propriétés du système modélisé, avant d'en effectuer la simulation. Mis à part CAMAS, ces programmes imposent un certain nombre de restrictions. Enport et CAMP ne sont pas conçus pour traiter les multibond graphs, TUTSIM n'accepte que les bond graphs causaux. Par ailleurs, la modélisation est fortement conditionnée par la forme des équations dynamiques liées au modèle ; considérons plus précisément les caractéristiques de chaque programme :

- CAMP (Computer Aided Modeling Program) [Gra84] : ce programme détecte les couplages entre variables d'énergie et les boucles algébriques, propose des alternatives à la modélisation initiale afin d'éviter les équations implicites (susceptibles d'engendrer des problèmes numériques lors de la résolution) et fait appel à des outils de simulation comme le DSL (Digital Simulation Language) qui peut malgré tout résoudre des systèmes implicites, le CSMP (Continuous System Modeling Program) ou le ACSL (Advanced Continuous Simulation Language).
- Enport [Ros71], [Ros87] met en œuvre une méthode matricielle systématique de réduction du système des relations initiales. Après assignation de la causalité (procédure SCAP [RK83]), la réduction est organisée en une série de manipulations de formules. Lorsque le système d'équations prévu est implicite non linéaire, ces manipulations peuvent s'avérer très complexes et être relayées à un certain stade de la réduction par la résolution numérique. En général, l'obtention de systèmes explicites est recherchée.
- TUTSIM (Twente University of Technology SIMulator) [BDM85] : ce programme, qui accepte en entrée interactive des combinaisons de blocks diagrams et de bond graphs causaux, est capable de simuler des systèmes non linéaires mais ne traite pas les boucles algébriques, si ce n'est en imposant une modification de la modélisation du système, se traduisant par l'introduction d'éléments de stockage négligés lors de la première modélisation mais justifiés d'un point de vue physique.
Il existe une version améliorée de TUTSIM, le programme MOSAIC [BBvL*88], qui permet notamment de simuler des bond graphs comportant des éléments multiport.
- CAMAS (Computer Aided Modelling, Analysis and Simulation) [Bro88] est spécialement conçu pour la modélisation et la simulation du comportement dynamique de systèmes d'ingénierie représentés par bond graphs. Le programme de résolution utilisé dépend de la forme, explicite ou implicite, du système algébro-différentiel à résoudre.

Les systèmes d'équations algébro-différentielles implicites sont, comme on peut le constater, souvent indésirables. Dans certains cas, le programme de résolution utilisé n'est pas en mesure de résoudre de tels systèmes, notamment les systèmes comportant des boucles algébriques (à éviter si l'on se sert de TUTSIM). D'autre part, le temps de résolution peut être considéré comme trop important, mais cette préoccupation concernant le temps de calcul tend à devenir obsolète compte tenu des progrès incessants de l'informatique. Enfin, pour la résolution de systèmes d'équations implicites non linéaires, il vaut mieux donner aux paramètres des valeurs initiales proches d'une solution, autrement la simulation risque de ne pas donner de résultats.

Une modification dans la modélisation du système, visant l'obtention d'équations explicites plus faciles à résoudre, n'est pas pour autant exempte de problèmes. On peut toujours ajouter des éléments bond graph de façon à éliminer les couplages entre variables d'énergie et les boucles algébriques. Mais ces éléments, censés modéliser des phénomènes négligés en premier lieu, introduisent des constantes de temps (associées aux valeurs propres du système) très petites en regard des autres et font du système d'équations un système dit "raide" ; ce genre de système nécessite d'une part, un pas de calcul suffisamment petit du fait des réponses à haute fréquence et d'autre part, un temps de simulation suffisamment long du fait des solutions liées aux constantes de temps longues. Les valeurs des paramètres introduits doivent être ajustées de façon à trouver un compromis entre ces deux impératifs.

Ainsi, on peut constater que l'élimination du problème numérique lié à un système d'équations implicites (sensibilité des valeurs initiales des variables) entraîne l'apparition d'un autre

type de problème numérique (résolution d'un système "raide"). En matière de résolution numérique, il n'existe donc pas de solution idéale, mais une solution préférée, en fonction du contexte dans lequel on se place. Cela étant, avec l'évolution des algorithmes de résolution et la puissance grandissante des ordinateurs, l'organisation des équations dynamiques sous forme explicite n'est plus une priorité. Le programme CAMAS adapte le système de résolution au modèle simulé et non le contraire. Cette démarche correspond à notre perspective, comme nous allons le montrer à présent.

3 Méthode proposée

3.1 Cadre de notre méthode

La figure 1 présente les différents modules (en trait continu) d'un système, mis au point par l'équipe [ADH89], [ADH91], qui réalise de façon automatique l'animation de systèmes mécaniques décrits initialement en termes d'objets, liaisons, contraintes et données sur l'état initial. Les différentes phases à partir de la modélisation géométrique sont, successivement, l'extraction des propriétés du mécanisme (centre de gravité, matrice d'inertie, etc...), l'écriture des équations du mouvement et la résolution de ces équations. Les opérations sont autant que possible effectuées en calcul formel ; les équations dynamiques sont obtenues sous forme symbolique et la partie numérique de la résolution n'est sollicitée qu'au tout dernier moment.

La modélisation fondée sur le formalisme bond graph devrait nous permettre d'animer des systèmes non seulement mécaniques mais aussi électriques, magnétiques, etc... Notre conception de la simulation d'un système modélisé par bond graph est liée aux travaux précédents de l'équipe sur le calcul formel et la résolution des équations. La figure 1 montre les étapes de l'application que nous souhaitons réaliser (en trait pointillé) : modélisation bond graph automatique à partir d'une description du système physique, obtention des équations dynamiques par réduction de l'ensemble des relations issues du modèle, résolution de ces équations. L'étape qui nous intéresse ici est l'étape de réduction du système des relations bond graph initiales.

La méthode de réduction a été mise au point en tenant compte des possibilités du module de résolution. Ce programme ne permet pas encore de résoudre les systèmes où se trouvent des fonctions à intervalles, ce qui ne nous donne pas pour le moment la possibilité de traiter des phénomènes avec saturation. Par contre, la réduction du système d'équations élémentaires n'est pas sujette à certaines contraintes comme par exemple la minimalité de l'ordre du système à obtenir ; les systèmes d'équations où interviennent des couplages entre variables d'énergie ou des boucles algébriques ne sont pas considérés comme problématiques, le module de résolution de l'équipe acceptant en entrée les systèmes d'équations algébro-différentielles implicites non linéaires. Nous ne recherchons pas un temps de résolution optimal mais raisonnable. Nous privilégions autant que possible le côté automatique de la procédure ; un temps de simulation important ne nous semble pas redhibitoire dans la mesure où le système n'a pas nécessité un, voire plusieurs changements de modélisation.

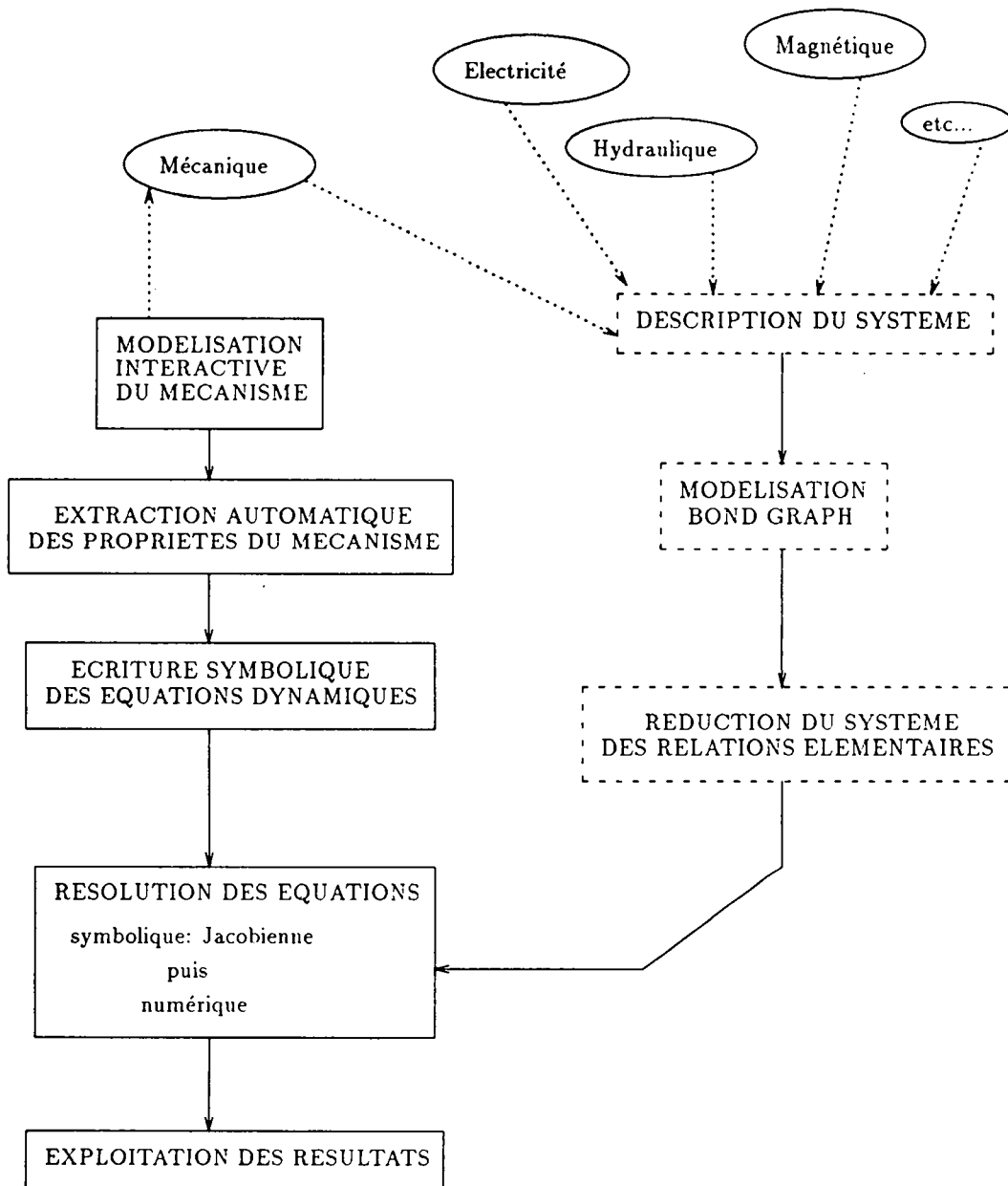


Figure 1 : Animation de systèmes mécaniques et animation de systèmes modélisés par bond graphs

3.2 Etape réduction

Compte tenu des caractéristiques de notre module de résolution, le système d'équations dynamiques recherché est un système d'équations différentielles d'ordre 2, avec comme variables des variables flux et intégrales de flux. La série de substitutions entre les variables du bond graph est effectuée de façon à se ramener à un système d'équations impliquant les variables d'énergie du système physique (qui correspondent aux éléments de stockage de l'énergie) et éventuellement d'autres variables caractéristiques en général de la géométrie du système. Les variables intervenant dans le système final sont les variables d'état.

Les relations issues directement du bond graph sont caractéristiques de différents types de phénomènes physiques. Ces relations sont au départ écrites sous la forme présentée ci-dessous. L'orientation des relations a son importance pour la suite des opérations ; par exemple, pour la dissipation linéaire de l'énergie, on écrit $dp = r * dq$ et non $dq = (1/r) * dp$. Les variables choisies sont les variables p et q (respectivement l'impulsion et le déplacement généralisés), et non les variables e et f (respectivement l'effort et le flux), car c'est l'évolution de la variable q (le déplacement) qui nous intéresse pour l'animation. Voici les différents types de phénomènes énergétiques susceptibles de se produire dans un système physique :

- *génération de l'énergie* : $dp = E$ ou $dq = F$
- *dissipation linéaire de l'énergie* : $dp = r * dq$
- *stockage linéaire de l'énergie* : $dp = (1/C) * q + const$ ou $dp = I * d^2q$
- *transformation de l'énergie par transformateur* : $dp_1 = A * dp_2$ et $dq_2 = A * dq_1$
- *transformation de l'énergie par gyrateur* : $dp_1 = B * dq_2$ et $dp_2 = B * dq_1$
- *transmission de l'énergie par jonctions 0 ou 1* : on a d'une part, des égalités entre variables et, d'autre part, des relations n-aires (pouvant impliquer plus de deux variables) qui constituent une sorte de préfiguration des équations dynamiques du système.

Lorsqu'interviennent des phénomènes non linéaires, les relations correspondantes sont écrites sous forme implicite et traitées lors de la dernière étape de substitutions.

La procédure de réduction se déroule comme suit :

1. Substitutions avec les relations d'égalité issues des jonctions 0 et 1.
2. Substitutions avec les relations correspondant aux éléments sources.
3. Substitutions avec les relations caractéristiques des transformateurs et des transformateurs modulés.
4. Substitutions avec les relations caractéristiques des gyrateurs, des gyrateurs modulés et des éléments dissipatifs.
5. Substitutions avec les éléments de stockage.

L'algorithme de la méthode présenté ci-dessus correspond à un certain ordonnancement des opérations, qui n'est pas unique. L'ordre choisi pour effectuer les différentes substitutions (concernant les relations des éléments transformateurs, gyrateurs, dissipatifs et de stockage) est celui qui nous a paru le plus simple.

Chaque étape, correspondant à une série de substitutions pour un type de relations, est organisée en tenant compte des effets potentiels que pourrait avoir les étapes précédentes sur la forme première des relations. Il serait possible d'intervertir par exemple l'étape des substitutions pour les éléments de stockage avec l'étape des substitutions pour les éléments gyrateurs et dissipatifs, à condition bien sûr de modifier en conséquence les parties de l'algorithme concernant ces étapes et de ne rien laisser au hasard, c'est à dire d'imaginer toutes les configurations possibles.

Commentons les différentes phases de l'algorithme (avant de suivre concrètement leur déroulement sur l'exemple proposé plus loin) :

Substitutions avec les relations d'égalité issues des jonctions 0 et 1

Les relations d'égalité entre variables issues des jonctions 0 et 1 permettent d'effectuer les premières substitutions de façon triviale. La variable substituante est, par ordre de préférence, une variable d'énergie liée à une capacité, ou une variable d'énergie liée à une inertie, ou l'une quelconque des variables liées à la jonction. La prévalence de la variable correspondant à une capacité est due à l'occurrence possible de la configuration suivante : lorsque une inertie et une capacité sont liées à la même jonction 1, on garde la variable de degré moindre et c'est la variable correspondant à la capacité (cf la relation $dp = (1/C) * q + const$).

Substitutions avec les relations correspondant aux éléments sources

Ces substitutions concernent les relations caractéristiques de la génération de l'énergie et se font directement.

Substitutions avec les relations caractéristiques des transformateurs et des transformateurs modulés

Ces substitutions se font avec les relations correspondant aux TFs. Du fait des substitutions déjà effectuées (comprenant notamment des substitutions du type TF), la relation considérée ne peut être substituée avant d'avoir été examinée. Il faut tenir compte de tous les cas possibles. Par exemple, si la variable du membre de gauche est une variable d'énergie, il faut tester la variable du membre de droite ; si c'est aussi une variable d'énergie, alors la relation est une équation d'état (si les variables sont des déplacements) ; sinon, la relation doit être inversée afin d'effectuer la bonne substitution. Par ailleurs, il se peut que la variable du membre de gauche soit multipliée par un facteur, ce qui rend la relation impossible à substituer telle quelle, et implique une réorganisation de la relation.

Substitutions avec les relations caractéristiques des gyrateurs, des gyrateurs modulés et des éléments dissipatifs

Les relations caractéristiques des gyrateurs et les relations caractéristiques des éléments dissipatifs sont traitées de la même façon car elles ont la même forme générale : indépendamment des facteurs multiplicatifs, la variable du membre de gauche est un dp et celle du membre de droite est un dq . Les substitutions effectuées avec les relations des TFs ne peuvent pas avoir modifié cette structure. Comme pour les substitutions antérieures, une relation donnée est

d'abord examinée puis éventuellement réorganisée avant toute opération.

Substitutions avec les éléments de stockage

Suivent les substitutions effectuées à l'aide des relations des éléments de stockage, toujours en envisageant les différentes configurations possibles.

Elimination des variables autres que les variables d'énergie dans les relations de sommation issues des jonctions 0 et 1

Restent à examiner les relations issues des jonctions 0 et 1, plus un certain nombre de relations écrites sous forme implicite. A ce stade, ces relations mettent en jeu les variables d'état et leurs dérivées, et les variables auxquelles on n'a pas pu substituer une variable d'état ou une dérivée de variable d'état. La démarche adoptée est la suivante : chaque relation est "parcourue" paramètre par paramètre : si toutes les variables sont des variables d'énergie, la relation considérée est une équation d'état et mise de côté comme telle. lorsqu'une variable s'avère ne pas être une variable d'état, cette variable est isolée dans le membre de gauche de la relation ; la relation ainsi réécrite sert à effectuer au moins une substitution dans les relations qui restent. Lorsque toutes les relations ont été traitées de cette manière, on peut exhiber les équations dynamiques du système physique.

Cette méthode de réduction du système des relations élémentaires bond graph est fondée sur une certaine forme de causalité, que l'on pourrait qualifier d'évolutive, car elle n'est fixée au départ : au gré des substitutions, la forme des relations se modifie et l'orientation de certaines de ces relations doit être inversée. Deux impératifs guident l'orientation d'une relation, au moment où elle va servir à effectuer une substitution :

- la connaissance des variables d'état finales oriente systématiquement une relation où intervient une variable d'énergie : cette variable doit être la variable substituante.
- L'élimination des variables de type impulsion donne aussi un certain sens aux relations tout au long de la procédure.

La cohérence de la structure de calcul est garantie par le fait suivant : l'élimination d'une variable est liée à l'élimination d'une relation (en l'occurrence la relation qui permet de substituer la variable en question dans les autres relations du système). Le système des relations reste un système carré : autant de variables que de relations, à chaque étape de substitution.

3.3 Résultats

Nous avons validé notre méthode en réalisant, à l'aide du langage MAPLE, un prototype qui effectue les substitutions automatiquement. Suivons sur un exemple le déroulement des opérations de substitutions. Le système pris comme exemple (fig. 2) est un chariot glissant sur une pente ; sur le chariot, une boule, retenue par un ressort amortisseur et un ressort en série, roule sans glisser. Le bond graph de ce système mécanique est représenté sur la figure 3.

Les numéros des arcs permettent d'indiquer les variables dp et dq portées par ces arcs. Les variables d'énergie du système, variables liées aux éléments de stockage, sont indicées 2, 4, 6, 11 et 15.

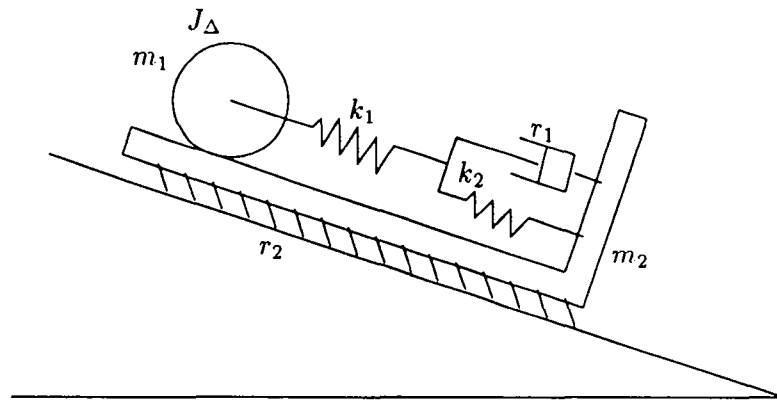


Figure 2 : Boule sur un chariot

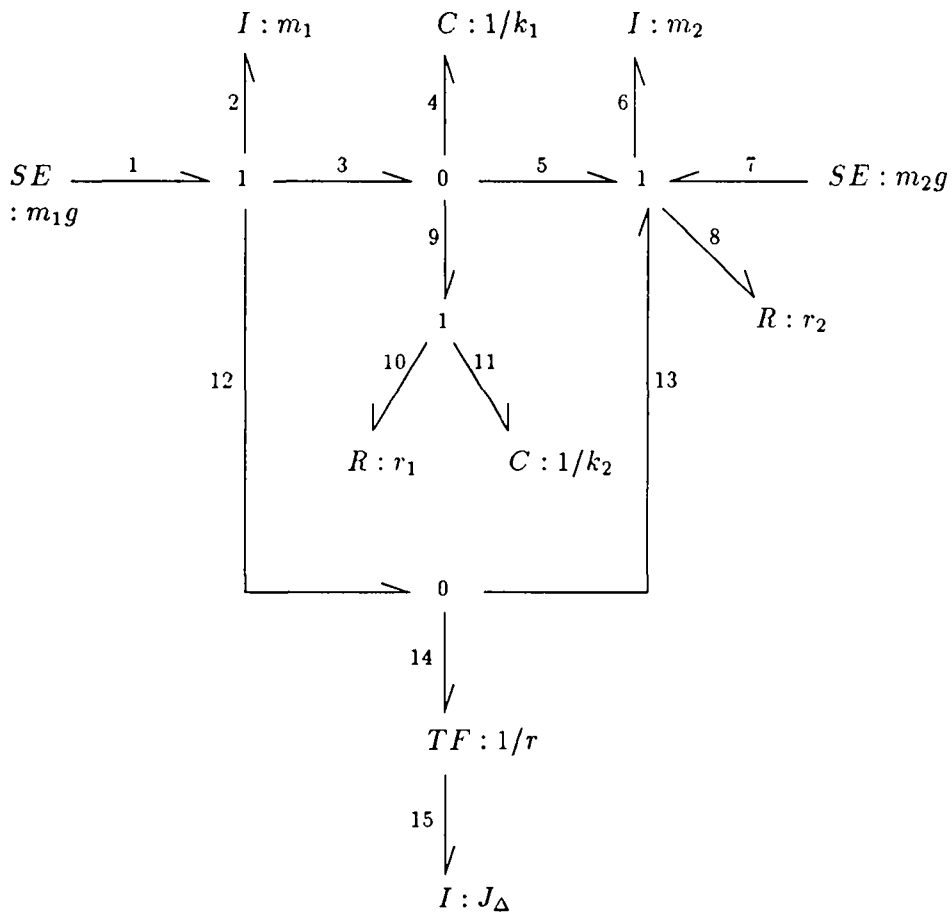


Figure 3 : Bond graph de la boule sur un chariot

Les relations issues directement du modèle bond graph sont écrites ci-dessous. Ces relations sont typées comme l'élément bond graph auquel elles sont associées.

1	$dp_1 = E1$	SE
2	$dp_1 - dp_2 - dp_3 - dp_{12} = 0$	J1
3	$dp_2 = m1 * d2q_2$	I
4	$dq_3 - dq_4 - dq_5 - dq_9 = 0$	J0
5	$dp_4 = k1 * q_4 + const1$	C
6	$dp_5 - dp_6 + dp_7 - dp_8 + dp_{13} = 0$	J1
7	$dp_6 = m2 * d2q_6$	I
8	$dp_7 = E2$	SE
9	$dp_8 = r2 * dq_8$	R
10	$dp_9 - dp_{10} - dp_{11} = 0$	J1
11	$dp_{10} = r1 * dq_{10}$	R
12	$dp_{11} = k2 * q_{11} + const2$	C
13	$dq_{12} - dq_{13} - dq_{14} = 0$	J0
14	$dp_{14} = 1/r * dp_{15}$	TF
15	$dq_{15} = 1/r * dq_{14}$	TF
16	$dp_{15} = J * d2q_{15}$	I
17	$dq_1 = dq_2$	J1
18	$dq_3 = dq_2$	J1
19	$dq_{12} = dq_2$	J1
20	$dp_3 = dp_4$	J0
21	$dp_5 = dp_4$	J0
22	$dp_9 = dp_4$	J0
23	$dq_5 = dq_6$	J1
24	$dq_7 = dq_6$	J1
25	$dq_8 = dq_6$	J1
26	$dq_{13} = dq_6$	J1
27	$dq_9 = dq_{11}$	J1
28	$dq_{10} = dq_{11}$	J1
29	$dp_{12} = dp_{13}$	J0
30	$dp_{14} = dp_{13}$	J0

Les relations numérotées de 17 à 30 sont les relations d'égalité entre variables, provenant des jonctions 0 et 1. Noter que les variables d'énergie intervenant ont été préalablement positionnées en variables substituantes. Les premières substitutions se font avec ces relations (sauf les relations 17 et 24 concernant les flux liés aux sources d'effort et qui n'interviennent pas dans les autres relations) et permettent l'obtention du système ci-après. Pour plus de clarté, les variables résultant tout juste d'une substitution sont écrites en caractères gras.

1	$dp_1 = E1$	SE
2	$dp_1 - dp_2 - dp_4 - dp_{13} = 0$	J1
3	$dp_2 = m1 * d2q_2$	I
4	$dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} = 0$	J0
5	$dp_4 = k1 * q_4 + const1$	C
6	$dp_4 - dp_6 + dp_7 - dp_8 + dp_{13} = 0$	J1
7	$dp_6 = m2 * d2q_6$	I
8	$dp_7 = E2$	SE
9	$dp_8 = r2 * dq_6$	R
10	$dp_4 - dp_{10} - dp_{11} = 0$	J1
11	$dp_{10} = r1 * dq_{11}$	R
12	$dp_{11} = k2 * q_{11} + const2$	C
13	$dq_2 - dq_6 - dq_{14} = 0$	J0
14	$dp_{13} = 1/r * dp_{15}$	TF
15	$dq_{15} = 1/r * dq_{14}$	TF
16	$dp_{15} = J * d2q_{15}$	I

Les relations 1 et 8, associées à la génération de l'énergie, donnent lieu à des substitutions triviales :

2	$E1 - dp_2 - dp_4 - dp_{13} = 0$	J1
3	$dp_2 = m1 * d2q_2$	I
4	$dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} = 0$	J0
5	$dp_4 = k1 * q_4 + const1$	C
6	$dp_4 - dp_6 + E2 - dp_8 + dp_{13} = 0$	J1
7	$dp_6 = m2 * d2q_6$	I
9	$dp_8 = r2 * dq_6$	R
10	$dp_4 - dp_{10} - dp_{11} = 0$	J1
11	$dp_{10} = r1 * dq_{11}$	R
12	$dp_{11} = k2 * q_{11} + const2$	C
13	$dq_2 - dq_6 - dq_{14} = 0$	J0
14	$dp_{13} = 1/r * dp_{15}$	TF
15	$dq_{15} = 1/r * dq_{14}$	TF
16	$dp_{15} = J * d2q_{15}$	I

Les relations 14 et 15 correspondent à l'élément transformateur de module $1/r$. Ces relations font intervenir une variable d'énergie (q_{15} et sa dérivée). La relation 14 est écrite dans le bon sens car la variable d'énergie se trouve du coté droit de la relation, mais ce n'est pas le cas de la relation 15 qui doit être inversée avant d'effectuer la substitution ; le contrôle des relations lors du déroulement des opérations entraîne la réécriture de la relation 15 qui devient $dq_{14} = r * dq_{15}$. Les substitutions peuvent alors être effectuées :

2	$E1 - dp_2 - dp_4 - 1/r * dp_{15} = 0$	J1
3	$dp_2 = m1 * d2q_2$	I
4	$dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} = 0$	J0
5	$dp_4 = k1 * q_4 + const1$	C
6	$dp_4 - dp_6 + E2 - dp_8 + 1/r * dp_{15} = 0$	J1
7	$dp_6 = m2 * d2q_6$	I
9	$dp_8 = r2 * dq_6$	R
10	$dp_4 - dp_{10} - dp_{11} = 0$	J1
11	$dp_{10} = r1 * dq_{11}$	R
12	$dp_{11} = k2 * q_{11} + const2$	C
13	$dq_2 - dq_6 - r * dq_{15} = 0$	J0
16	$dp_{15} = J * d2q_{15}$	I

L'étape suivante est l'étape des substitutions à partir des relations associées aux éléments gyrateurs et dissipatifs. Il n'y a pas de gyrateurs dans le bond graph mais des éléments dissipatifs. Dans la relation 9, de même que dans la relation 11, intervient une variable d'énergie positionnée en variable substituant (dans le membre de droite de la relation) ; il n'est donc pas nécessaire de réorganiser ces relations avant de procéder aux substitutions :

2	$E1 - dp_2 - dp_4 - 1/r * dp_{15} = 0$	J1
3	$dp_2 = m1 * d2q_2$	I
4	$dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} = 0$	J0
5	$dp_4 = k1 * q_4 + const1$	C
6	$dp_4 - dp_6 + E2 - r2 * dq_6 + 1/r * dp_{15} = 0$	J1
7	$dp_6 = m2 * d2q_6$	I
10	$dp_4 - r1 * dq_{11} - dp_{11} = 0$	J1
12	$dp_{11} = k2 * q_{11} + const2$	C
13	$dq_2 - dq_6 - r * dq_{15} = 0$	J0
16	$dp_{15} = J * d2q_{15}$	I

Sont traitées ensuite les relations correspondant aux éléments de stockage du système. Ce sont les relations 3, 5, 7, 12 et 16. Aucune de ces relations ne nécessite de re-écriture. Les substitutions donnent :

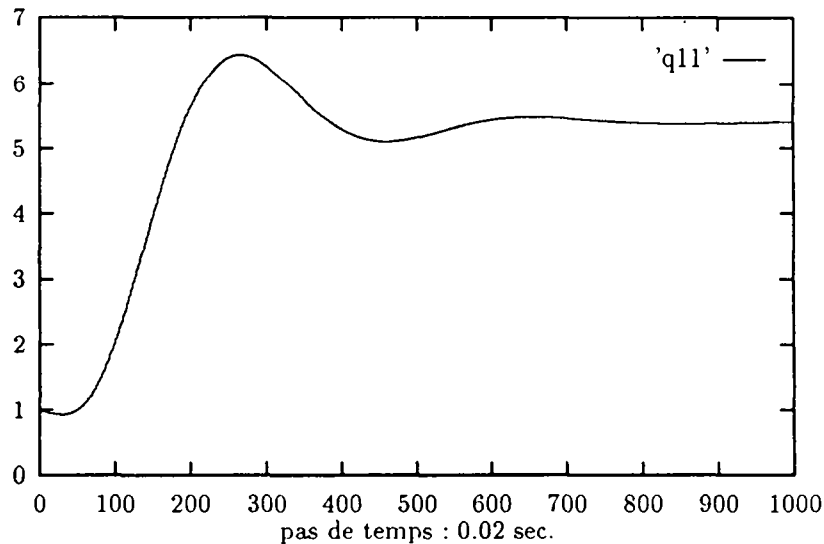
2	$E1 - m1 * d2q_2 - (k1 * q_4 + const1) - 1/r * J * d2q_{15} = 0$	J1
4	$dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} = 0$	J0
6	$(k1 * q_4 + const1) - m2 * d2q_6 + E2 - r2 * dq_6 + 1/r * J * d2q_{15} = 0$	J1
10	$(k1 * q_4 + const1) - r1 * dq_{11} - (k2 * q_{11} + const2) = 0$	J1
13	$dq_2 - dq_6 - r * dq_{15} = 0$	J0

Ces relations ne font intervenir que des variables d'énergie. Il n'y a donc aucune variable à éliminer. La réduction du système des relations bond graph est terminée. Les relations qui restent forment le système des équations dynamiques du mécanisme :

$$\begin{aligned}
 E1 - m1 * d2q_2 - k1 * q_4 - const1 - 1/r * J * d2q_{15} &= 0 \\
 dq_2 - dq_4 - dq_6 - dq_{11} &= 0 \\
 k1 * q_4 + const1 - m2 * d2q_6 + E2 - r2 * dq_6 + 1/r * J * d2q_{15} &= 0 \\
 k1 * q_4 + const1 - r1 * dq_{11} - k2 * q_{11} - const2 &= 0 \\
 dq_2 - dq_6 - r * dq_{15} &= 0
 \end{aligned}$$

On est passé de trente relations au départ à cinq équations finales. En général, la réduction de l'ordre du système initial se fait par un facteur allant de 5 à 10. A titre indicatif, le nombre de relations élémentaires est égal au nombre de ports du modèle bond graph. Le nombre de relations finales est proche du nombre d'éléments de stockage du modèle bond graph. Il est donc possible d'estimer dès le départ le facteur de réduction du système d'équations.

Le système d'équations obtenu peut ensuite être résolu. La figure ci-dessous illustre un résultat de simulation. La courbe représente l'évolution de la variable q_{11} , déplacement du ressort de raideur $k2$.



4 Conclusion

Nous avons élaboré une méthode permettant l'obtention sous forme symbolique des équations dynamiques d'un système modélisé par bond graph. La méthode consiste à effectuer une série de substitutions formelles à partir des relations élémentaires issues du modèle. Cette démarche, qui vient naturellement lorsque l'on cherche à réduire le système des relations bond graph à la main, présente l'avantage de se prêter remarquablement au calcul formel. Le système d'équations obtenu peut comporter des couplages entre variables d'énergie ou des boucles algébriques car le module de résolution traite les systèmes algébro-différentiels implicites non linéaires. Ce minimum de restrictions concernant la forme finale des équations confère une certaine souplesse à la procédure automatique de réduction, et permet surtout d'éviter une éventuelle interruption de la simulation liée à une modification de la modélisation du système physique.

Le programme de réduction du système des relations bond graph, qui a permis de tester la méthode proposée, est pour le moment un prototype écrit en langage MAPLE. La prochaine étape est l'écriture du programme en langage C.

Le prototype réalisé est conçu pour traiter des bond graphs simples, avec éléments dynamiques 1-port. Nous comptons intégrer les éléments de stockage ou de dissipation multiport, qui sont incontournables pour la modélisation de certains phénomènes physiques [vD89].

Par ailleurs, nous projetons l'extension de notre méthode aux multi-bond graphs (ou bond graphs vectoriels), qui seront particulièrement indiqués pour la modélisation systématique des systèmes mécaniques polyarticulés à 3 dimensions [Bos86].

Remerciements

Je tiens à remercier Bruno Arnaldi, Georges Dumont et Gérard Hégron pour leur aide et leurs conseils avisés.

ANNEXE : Présentation du langage bond graph

INTRODUCTION

Dans cette annexe, nous présentons les notions de base du formalisme bond graph, introduit en 1961 par H.M. Paynter. Pour un exposé détaillé, on peut se reporter au livre de Karnopp et Rosenberg [RK83], ou celui de Thoma [Tho90], ou encore à la thèse de Breedveld [Bre84].

Le formalisme bond graph est fondé sur la notion d'énergie, notion commune à tous les domaines de la physique (mécanique, électricité, hydraulique, acoustique, thermodynamique, etc...). Cette approche énergétique est orientée de façon à pouvoir représenter sous une forme unifiée les systèmes physiques pluri-disciplinaires tels, par exemple, le système choisi pour illustrer cette présentation (fig. 4), et dont on peut voir le modèle bond graph sur la figure 5.

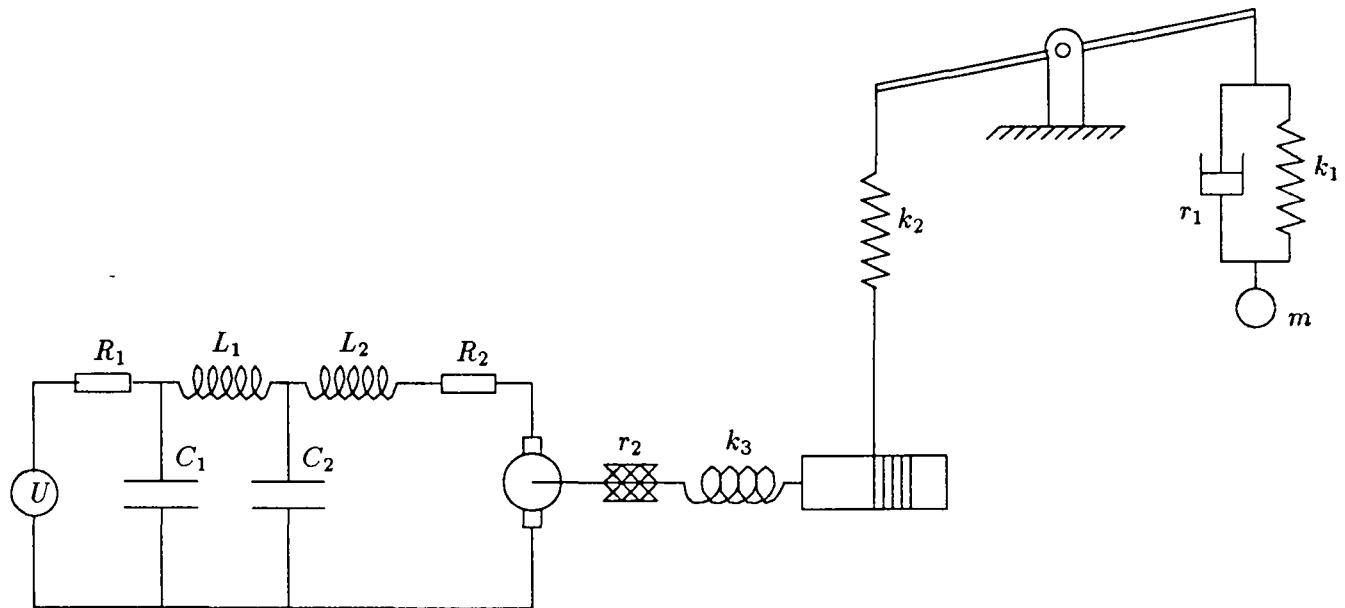


Figure 4 : Système électro-mécanique

Cette modélisation forme une interconnexion de type énergétique entre des éléments représentatifs de différents phénomènes énergétiques se produisant dans le système. Voyons ce que signifient les différents symboles de la modélisation bond graph.

LE LANGAGE BOND GRAPH

Un bond graph est constitué à l'aide de nœuds typés modélisant les phénomènes de génération, de stockage, de dissipation ou de transmission de la puissance, et d'arcs représentant les

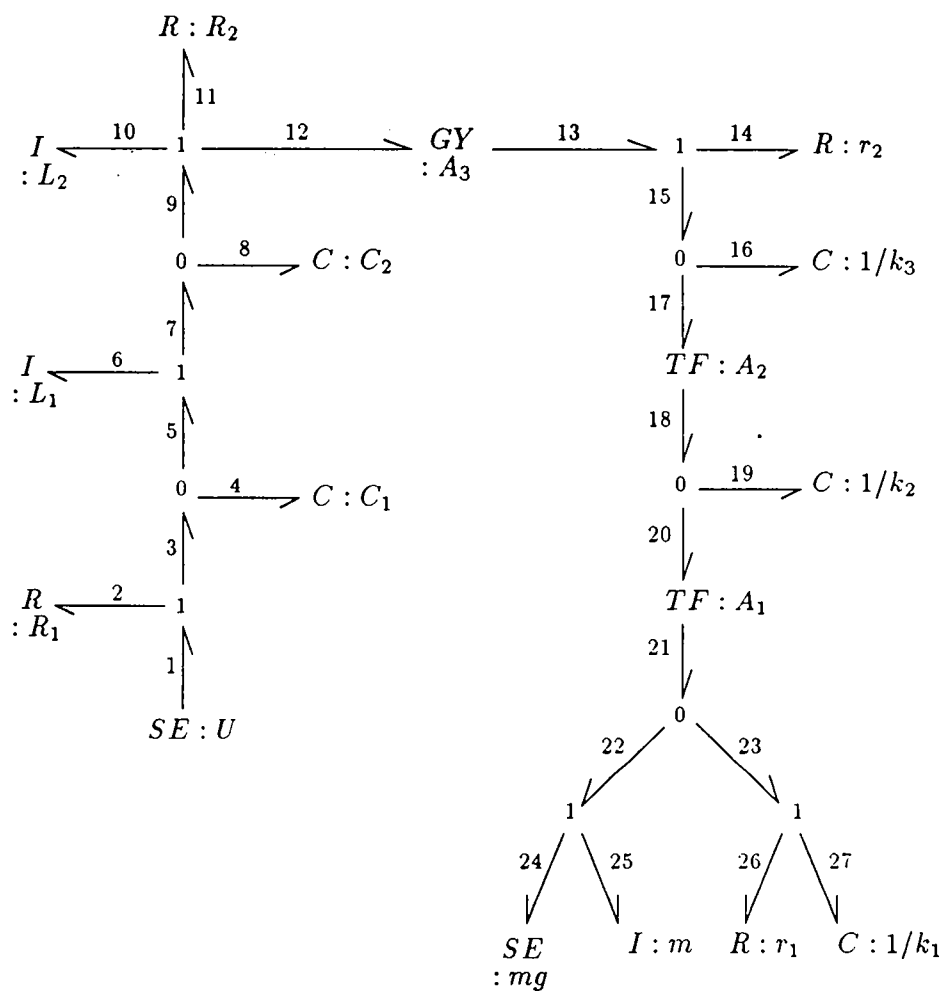


Figure 5 : Bond graph du système électro-mécanique

	effort e	flux f	impulsion généralisée $p = \int e * dt$	déplacement généralisé $q = \int f * dt$
Translation mécanique	force (N)	vitesse ($m s^{-1}$)	impulsion (N s)	position (m)
Rotation mécanique	couple (N m)	vitesse angulaire ($rad s^{-1}$)	impulsion angulaire (N m s)	angle (rad)
Hydraulique	pression hydraulique ($N m^{-2}$)	débit volumique ($m^3 s^{-1}$)	impulsion hydraulique ($N m^{-2} s$)	volume (m^3)
Acoustique	pression ($N m^{-2}$)	vitesse volumique ($m^3 s^{-1}$)	moment ($N m^{-2} s$)	volume (m^3)
Electricité	tension (V)	intensité (A)	flux magnétique (Wb)	charge (C)
Chimie	potentiel chimique ($J mol^{-1}$)	débit molaire ($mol s^{-1}$)	?	masse molaire (mol)
Thermodynamique	temperature (K)	débit d'entropie ($J s^{-1} K^{-1}$)	?	entropie ($J K^{-1}$)

Table 1 : Variables de puissance et variables d'énergie selon différentes disciplines

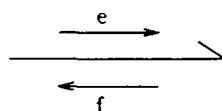
échanges de puissance se produisant entre ces nœuds.

Transmission de la puissance

Un arc représente une transmission de puissance P entre les deux nœuds qu'il relie. La demi-flèche est une notation spécifique au bond graph et signifie une transmission de puissance et non de signal. Le sens de la demi-flèche indique l'orientation positive choisie par convention pour la puissance.

La puissance P est exprimée comme le produit de deux entités duales l'une de l'autre, l'effort e et le flux f. Ces deux termes, effort et flux, sont des dénominations globales, caractéristiques du formalisme bond graph. Nous avons l'habitude de les désigner différemment selon le domaine physique considéré et la terminologie correspondante ; par exemple, en mécanique, l'effort correspond à la force et le flux, à la vitesse ; en électricité, l'effort correspond à la tension et le flux, à l'intensité du courant. Le tableau 1 indique les différentes correspondances effort et flux selon les domaines.

La transmission de puissance que représente un arc peut être décomposée en une transmission de flux et une transmission d'effort en sens inverse.



Les arcs d'un modèle bond graph sont numérotés, comme sur la figure 5, et les efforts et les flux qui transitent le sont également ; par exemple, l'arc numéro 6 symbolise la transmission du flux f_6 et de l'effort e_6 .

Les efforts et les flux sont les variables paramètres du système. On peut aussi paramétrer le système avec les variables p et q , intégrales de e et f ($p = \int e$, $q = \int f$), et dont le produit $p * q$ donne l'intégrale de la puissance par rapport au temps, c'est à dire l'énergie.

On voit apparaître dans le tableau 1 des points d'interrogation dans les cases impulsions pour la thermodynamique et la chimie. Ces vides traduisent l'impossibilité de trouver dans ces deux domaines un équivalent de l'impulsion généralisée. Ils ne remettent pas en cause le formalisme bond graph classique, qui reste un outil bien organisé, notamment lorsque l'on s'intéresse à des systèmes comprenant des phénomènes électriques, mécaniques et hydrauliques par exemple. Cela étant, le formalisme bond graph a été remanié de façon à renforcer sa cohérence et sa généralité [Bre84]. Les variables génériques du "bond graph généralisé" sont au nombre de trois : la variable d'état q , l'effort $e = \frac{dE}{dq}$ et le flux $f = \frac{dq}{dt}$. Les impulsions classiques sont intégrées différemment au formalisme de sorte qu'il y a redistribution des domaines. Le domaine de la translation mécanique est décomposé en deux domaines, potentiel de translation mécanique et cinétique de translation mécanique, idem pour les domaines de la rotation mécanique, de l'hydraulique et de l'acoustique. Le domaine électrique est différencié du domaine magnétique.

Dans tout ce qui suit, nous nous plaçons dans le contexte bond graph classique.

Phénomènes énergétiques

Afin de caractériser les différents types de phénomènes énergétiques qui peuvent se produire dans un système, on utilise différents types d'éléments, qui constituent les nœuds du graphe. La modélisation de la figure 5 montre les principaux types d'éléments bond graph ; les valeurs indiquées à la suite du symbole de l'élément concerné sont les paramètres du système étudié. La connection entre un nœud du graphe et un arc lié à ce nœud est appelée un port ; les éléments bond graph peuvent être des éléments 1-port, 2-ports ou multi-ports, le nombre de ports étant égal à l'arité du nœud élément en question.

A chaque type d'élément sont associées une ou deux relations caractéristiques du phénomène énergétique symbolisé ; ces relations sont formulées dans le tableau 2.

La *génération de l'énergie* est représentée par des éléments de type source. Il y a deux sortes d'éléments source : les sources d'effort notées SE et les sources de flux notées SF. Le poids $m * g$ de la masse m du mécanisme de notre exemple constitue une source d'effort.

La *dissipation de l'énergie* est modélisée par des éléments de type résistif, notés R. Un frottement, une résistance sont symbolisés de cette façon, comme on peut le voir sur notre bond graph exemple. La relation bond graph associée lie l'effort et le flux. Dans le cas linéaire, cette relation s'écrit $e = Rf$; on retrouve l'équivalent familier en électricité $U = RI$ entre la tension et l'intensité, ou alors en mécanique, la relation $F = Kv$ entre la force et la vitesse.

Le *stockage de l'énergie* peut se traduire de deux façons, selon la quantité stockée, p ou q , et par conséquent, selon la forme de l'énergie stockée. La quantité p , obtenue par accumulation de l'effort ($p = \int e dt$) est stockée dans les éléments de type I. La quantité q , obtenue par accumulation du flux, est stockée dans les éléments de type C. En mécanique par exemple, une masse stocke une impulsion mv (donc une énergie cinétique $(1/2)mv^2$) et est représentée par un élément I, tandis qu'un ressort stocke un déplacement x (donc une énergie potentielle $(1/2)kx^2$) et est représenté par un élément C. On peut constater que les formules indiquées dans le tableau










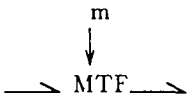

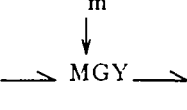

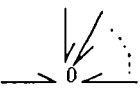
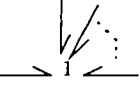
symbole	nom	relations élémentaires	exemple
ELEMENTS SOURCES			
SE 	source d'effort	$e(t)$ donné	poids source de tension
SF 	source de flux	$f(t)$ donné	source de vitesse source de courant
ELEMENTS DISSIPATIFS			
 R	résistance	$\phi(e, f) = 0$ $e = \mathcal{R} * f$ (cas linéaire)	amortisseur résistance frottement dans un tuyau (hyd.)
ELEMENTS DE STOCKAGE			
 C	capacité	$\phi(e, q) = 0$ cas linéaire : $e = e(0) + (1/C) * \int f * dt$	ressort condensateur réservoir hydraulique
 I	inertie	$\phi(f, p) = 0$ cas linéaire : $f = f(0) + (1/I) * \int e * dt$	masse inductance
ELEMENTS DE TRANSMISSION 2-PORTS			
 TF 	transformateur	$e_1 = m * e_2$ $f_2 = m * f_1$	levier transformateur électrique
 GY 	gyrateur	$e_1 = m * f_2$ $e_2 = m * f_1$	convertisseur électro-dynamique
 MTF 	transformateur modulé	$e_1 = m(t) * e_2$ $f_2 = m(t) * f_1$	contrainte géométrique
 MGY 	gyrateur modulé	$e_1 = m(t) * f_2$ $e_2 = m(t) * f_1$	moteur électrique
ELEMENTS DE TRANSMISSION MULTI-PORTS			
	jonction 0	$e_1 = e_2 = \dots e_n$ $\sum f = 0$	point de force commune montage en parallèle (élec. ou hyd.)
	jonction 1	$f_1 = f_2 = \dots f_n$ $\sum e = 0$	point de vitesse commune montage en série

Table 2 : Eléments bond graph de base

2 englobent bien les relations linéaires classiques, $F = m \frac{dv}{dt}$ (masse) et $F = kx$ (ressort).

La *transmission de l'énergie* au sein du système est décrite avec des éléments transducteurs et des éléments de type jonction. Ces éléments, conservatifs de la puissance, sont rassemblés en une structure, appelée structure de jonction, qui reconstitue la topologie du système.

Les éléments de type transducteur sont les transformateurs et les gyrateurs.

Considérons le levier du système électro-mécanique pris en exemple ; La force et la vitesse à une extrémité du levier sont retrouvées à l'autre extrémité du levier multipliées par un même facteur. Un tel effet est modélisé à l'aide d'un transformateur ; l'effort et le flux à un port du transformateur sont proportionnels dans un même rapport à l'effort et au flux à l'autre port.

Lorsque l'on veut représenter une proportionnalité cette fois entre l'effort (resp. le flux) à un port et le flux (resp. l'effort) à l'autre port, on utilise un élément transducteur appelé gyrateur. Le gyrateur de notre exemple exprime le passage du sous-système électrique au sous-système mécanique, le circuit électrique faisant office de source de vitesse pour le mécanisme. Soulignons à ce propos une propriété importante du langage bond graph, à savoir la modularité : les parties électrique et mécanique du système électro-mécanique constituent deux blocs distincts du modèle bond graph et sont assemblés avec un élément de la structure de jonction. A un niveau plus général, un modèle bond graph constitue une interconnexion hiérarchique de sous-modèles, le modèle élémentaire étant l'élément bond graph de base. En mécanique, cette modularité est particulièrement manifeste dans la modélisation de systèmes d'objets articulés.

Jonction 0 et jonction 1 signifient respectivement jonction d'effort commun et jonction de flux commun. Les relations correspondantes sont indiquées dans le tableau 2.

On reconnaît en électricité la traduction de deux formes de montage, parallèle ou série (lois de Kirchhoff). Par exemple, l'inductance no 2 (figure 4) et la résistance no 2 sont en série et donc connectées à une jonction 1 représentative de l'intensité commune les traversant. La jonction 0 quant à elle revêt une importance particulière lors de la construction du modèle bond graph d'un système électrique, car elle symbolise des nœuds physiques du circuit, les nœuds de tension. Les jonctions 1 permettent alors d'exprimer des différences de tension. Les éléments bond graph sont ensuite connectés.

En mécanique c'est la jonction 1, représentant la vitesse en un point, qui à un rôle de référence. Un certain nombre de jonctions de référence disparaissent du modèle bond graph à la suite de simplifications.

Nous venons de passer en revue les éléments fondamentaux du langage bond graph. Il existe d'autres éléments, par exemple des éléments de stockage ou de dissipation multi-port destinés à la modélisation de phénomènes physiques plus complexes, ou bien alors des éléments composites comme par exemple les sources génératrices à la fois d'effort et de flux. Par ailleurs, le langage bond graph a été étendu avec l'élaboration du langage multi-bond graph [Bre84] ; ces bond graphs "vectoriels", adaptés en particulier à la modélisation des mécanismes à 3 dimensions [Bos86], introduisent de nouvelles notations, qui permettent notamment de bien différencier les éléments simples des éléments vectoriels. Cela étant, ces extensions constituent surtout une sorte de perfectionnement du langage bond graph mais n'introduisent pas de nouvelles notions de base.

CONCLUSION

Cette brève introduction au langage bond graph avait pour but de familiariser le lecteur avec

les notations bond graph et, au delà, avec la philosophie de ce formalisme. Nous espérons surtout avoir bien fait sentir tout l'intérêt d'un tel langage, qui permet de modéliser sous une forme unifiée et modulaire des systèmes physiques pluri-disciplinaires, puis d'en effectuer la simulation grâce au modèle mathématique lié au modèle physique. Pluri-disciplinarité, homogénéité du langage, modularité, structure de calcul associée à la représentation topologique du système, ce sont ces caractéristiques qui font la force du langage bond graph.

Bibliographie

- [ADH89] B. Arnaldi, G. Dumont, et G. Hégron. Dynamics and unification of animation control. *The Visual Computer*, (5):22-31, mars 1989.
- [ADH91] B. Arnaldi, G. Dumont, et G. Hégron. Animation of physical systems from geometric, kinematic and dynamic models. Dans les actes de *Modeling in Computer Graphics*, Springer-Verlag, éditeur, pages 37-53, IFIP Working conference 91 (TC 5/WG5. 10), apr 1991.
- [BBvL*88] P.C. Breedveld, J.F. Broenink, W. van Luenen, G. Baardman, et E. Uilentuis. MOSAIC, a userfriendly, menu-driven follow-up of TUTSIM, allowing multiport elements and subroutines. Dans les actes de *Congrès IMACS 1988*, pages 54-56, IMACS, 1988.
- [BDM85] J.J.A. Beukeboom, J.J. Van Dixhoorn, et J.W. Meerman. Simulation of mixed bond graphs and block diagrams on personal computers using TUTSIM. *Journal of the Franklin Institute*, 319(1/2):257-267, jan 1985.
- [Bos86] Albert Martinus Bos. *Modelling multibody systems in terms of multibond graphs, with application to a motorcycle*. Thèse de Doctorat, Twente University, 1986.
- [Bos88] A.M. Bos. Solvability of DAE'S derived from bond graphs of mechanical systems. Dans les actes de *Congrès IMACS 1988*, pages 60-63, IMACS, 1988.
- [Bre84] Pieter Cornelis Breedveld. *Physical systems theory in terms of bond graphs*. Thèse de Doctorat, Twente University of Technology, feb 1984.
- [Bro88] Jan F. Broenink. CAMAS, a bond graph simulation environment for engineering systems. Dans les actes de *Congrès IMACS 1988*, pages 47-49, IMACS, 1988.
- [Gra84] Jose J. Granda. Bond graph modeling solutions of algebraic loops and differential causality in mechanical and electrical systems. Dans les actes de *Proc. Applied Simulation and Modeling*, pages 183-193, IASTED conference ,SF, CA, 1984.
- [Kar81] Dean Karnopp. Using bond graphs in nonlinear simulation problems. *Simulation*, 36(6):183-192, jun 1981.
- [RK83] R.C. Rosenberg et D. Karnopp. *Introduction to Physical System Dynamics. mechanical engineering*, McGraw-Hill Book Company, 1983.
- [Ros71] R.C. Rosenberg. State-space formulation for bond graph models of multiport systems. *Transactions of the ASME-Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 35-40, mar 1971.

- [Ros87] R.C. Rosenberg. Exploiting bond graph causality in physical system models. *Transactions of the ASME-Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 109:378–383, dec 1987.
- [Tho90] Jean U. Thoma. *Simulation by Bond graphs - introduction to a graphical method*. Springer-Verlag, 1990.
- [vD89] J.J. van Dixhoorn. Bond graphs and the challenge of a unified modelling theory of physical systems. Dans les actes de *Ecole d'été bond graph 89*, pages 207–245, Ecole bond graph- Roanne, sep 1989.

LISTE DES DERNIERES PUBLICATIONS INTERNES IRISA

- PI 598 KOAN : A VERSATILE TOOL FOR PARALLELIZING REALISTIC RENDERING ALGORITHMS
Didier BADOUEL, Kadi BOUATOUCH, Zakaria LAHJOMRI, Thierry PRIOL
Juillet 1991, 28 pages.
- PI 599 STATISTICAL ESTIMATION OF ROUND OFF ERRORS AND CONDITION NUMBERS
Jocelyne ERHEL
Septembre 1991.
- PI 600 NOMBRE DE SOLUTIONS ET SATISFIABILITE D'UN PROBLEME SAT ; UNE APPROCHE ENSEMBLISTE, COMBINATOIRE ET STATISTIQUE
Israël-César LERMAN
Septembre 1991.
- PI 601 ACCELERATED STOCHASTIC APPROXIMATION
Bernard DELYON, Anatoli JUDITSKY
Septembre 1991, 22 pages.
- PI 602 MINIMUM VARIANCE CONTROL : RANDOM AUTOREGRESSIVE PARAMETERS
Anatoli JUDITSKY
Septembre 1991, 26 pages.
- PI 603 L'EXPERIMENTATION D'ALGORITHMES DISTRIBUES SUR MACHINES PARALLELES AVEC ECHIDNA
Jean-Marc JEZEQUEL
Claude JARD
Septembre 1991, 64 pages.
- PI 604 A GENERAL METHOD TO DEFINE QUORUMS
Mitchell L. NEILSEN, Masaaki MIZUNO, Michel RAYNAL
Septembre 1991, 20 pages.
- PI 605 OBTENTION DES EQUATIONS DYNAMIQUES D'UN SYSTEME PHYSIQUE A PARTIR DE SON MODELE BOND GRAPH
Bénédicte EDIBE
Septembre 1991, 26 pages.

ISSN 0249 - 6399